MODELO MATRICIAL PARA PREVISIÓN DE LA DEMANDA DE PUESTOS ESCOLARES

Por ÁNGEL RAMOS SOBRINO

Ofrezco aquí un breve resumen de un modelo matricial utilizado para la localización óptima de escuelas en el Municipio de Valencia [1]. Dicho modelo matricial puede igualmente utilizarse para prever y planificar las necesidades de Centros de Enseñanza en las distintas regiones, provincias, y, en general, en todo territorio dividido en zonas.

El modelo es dinámico, puesto que pretende prever las necesidades de las diversas zonas en una serie de períodos de tiempo iguales entre sí.

Este modelo matricial aunque puede aplicarse a otros niveles de enseñanza, resulta singularmente apropiado para la enseñanza primaria, puesto que no se implican en el mismo otras variables que las puramente demográficas. En otros niveles de enseñanza, además de la demografía juegan otras variables, especialmente la económica, según puede verse en modelos como en los de Tinbergen, pero en el período de enseñanza obligatoria, es decir, en la enseñanza primaria y primer ciclo de la enseñanza media, es puramente la demografía quien determina las necesidades de puestos escolares. A la predicción de dichas necesidades, por grupos de edades, y en las distintas regiones en que se considera dividido un territorio, tiende la matriz de Andrei Rogers que vamos a describir.

Consideramos la población dividida en varios grupos de edad en el instante *t*, y representamos esta distribución de la población por un vector columna W_t

---

[1] RAMOS SOBRINO, A.; REVERT REVERT, V.; RUIZ-NAVARRO, M.; GUIJARRO NEIRA, F., *Localización de Escuelas en el Municipio de Valencia.* Escuela de Investigación Operativa.

$$W_t = \begin{bmatrix} {}^{1}W_t \\ {}^{2}W_t \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ {}^{15}W_t \end{bmatrix}$$

Aplicamos la matriz S, de Rogers a W_t, lo que nos dará los sobrevivientes de la población en el siguiente instante $t + 1$

$$W_{t+1} = S \, . \, W_t$$

La matriz-operador que ha de darnos los sobrevivientes de un vector inicial de población en el instante siguiente, es de la forma:

$$\underset{n \times n}{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & \ldots\ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & \ldots\ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & \ldots\ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \ldots\ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & d_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos no nulos de esta matriz están en la subdiagonal y en la primera fila. Los primeros denotan la proporción de un grupo de edad que puede sobrevivir en el período siguiente. Los de la primera fila indican la proporción de habitantes de un grupo de edad que tendrán un hijo en dicho período de tiempo. Por ello, incluso, los primeros y los últimos elementos de la primera fila son también nulos, ya que corresponden a períodos no fértiles.

Los períodos que pudiéramos considerar podrían ser de 4 años, para estar de acuerdo con la duración de los Planes de Desarrollo.

Los datos para llenar esta matriz habría que tomarlos de tablas estadísticas de sobrevivencia y tablas de fertilidad.

La ecuación anterior nos indica que los efectos de la migración todavía no han sido tenidos en cuenta. En un segundo tiempo entra en juego esta variable de tanta importancia para la transformación de la población de un sistema interregional. En el caso de España un sistema, p. e., un sistema de 50 provincias.

A cada región i, le corresponde una población W_t. Esto nos dará una matriz de población en el instante t.

$$W_t = \begin{bmatrix} {}_{A}^{1}W_t & {}_{B}^{1}W_t & \cdots & {}_{Z}^{1}W_t \\ {}_{A}^{2}W_t & {}_{B}^{2}W_t & \cdots & {}_{Z}^{2}W_t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {}_{A}^{15}W_t & {}_{B}^{15}W_t & \cdots & {}_{Z}^{15}W_t \end{bmatrix}$$

Durante cada unidad de tiempo, los 4 años de que hablábamos, p. e., una cierta proporción de la i-ésima región, en un grupo de edad dado, emigra a otra región j. Así para cada grupo de edad, podemos definir una matriz de transición interregional ${}^{e}P$. Así tenemos para el primer grupo de edades:

$${}^{e}P = \begin{bmatrix} {}_{AA}^{1}P & {}_{AB}^{1}P & {}_{AC}^{1}P & \cdots & {}_{AZ}^{1}P \\ {}_{BA}^{1}P & {}_{BB}^{1}P & {}_{BC}^{1}P & \cdots & {}_{BZ}^{1}P \\ {}_{CA}^{1}P & {}_{CB}^{1}P & {}_{CC}^{1}P & \cdots & {}_{CZ}^{1}P \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {}_{ZA}^{1}P & {}_{ZB}^{1}P & {}_{ZC}^{1}P & \cdots & {}_{ZZ}^{1}P \end{bmatrix}$$

De aquí pasamos a la matriz de flujo de migración para el e-ésimo grupo de edad:

$${}^{e}K = {}^{e}A \cdot {}^{e}P$$

En la que ${}^{e}A$ es una matriz diagonal cuyos elementos no nulos denotan la población de cada región en el e-ésimo grupo de edad. Así para el grupo primero tenemos:

$$\begin{bmatrix} {}_{A}^{1}W_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {}_{B}^{1}W_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & {}_{C}^{1}W_t & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & {}_{Z}^{1}W_t \end{bmatrix}$$

En la matriz de flujo de migración ${}^{e}K$ resultante de multiplicar la matriz de transición interregional ${}^{e}P$ por la citada matriz diagonal ${}^{e}A$, la primera fila indica los habitantes del grupo de edad e que salen de la región A. La segunda fila los que salen de la región B, y así sucesivamente. La primera columna indica el número de habitantes en edad e, que llegan a la región A. La segunda columna, los que llegan a la región B, y así sucesivamente.

Para tener en cuenta las migraciones exteriores al sistema considerado habrá que incluir el territorio exterior al sistema como una región más a efectos matriciales.

$$
{}^{e}K = \begin{bmatrix}
{}^{e}_{AA}N & {}^{e}_{AB}N & \cdots\cdots & {}^{e}_{AZ}N \\
{}^{e}_{BA}N & {}^{e}_{BB}N & \cdots\cdots & {}^{e}_{BZ}N \\
{}^{e}_{CA}N & {}^{e}_{CB}N & \cdots\cdots & {}^{e}_{CZ}N \\
\cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\
{}^{e}N & {}^{e}N & \cdots\cdots & {}^{e}_{ZZ}N
\end{bmatrix}
$$

De esta matriz que nos indica el número total de población en cada grupo de edad que se desplaza de la región i a la región j durante el intervalo de tiempo $(t, t + 1)$, pasamos a calcular la migración neta de cada grupo de edad para cada una de las m regiones, restando el número total de emigrantes, del número total de inmigrantes. En notación matricial sería:

$$
{}^{e}n_t = 1' \cdot {}^{e}K - [{}^{e}K \cdot 1]'
$$

donde

$$
1' = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0
\end{bmatrix}
\quad
1 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0
\end{bmatrix}
$$

De donde resultará:

$$N_t = \begin{bmatrix} {}^{1}n'_t \\ {}^{2}n'_t \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ {}^{15}n'_t \end{bmatrix}$$

Puesto que disponemos de métodos matriciales para manejar cada uno de los componentes de la variación de la población, se puede condensar todo esto en el siguiente modelo de crecimiento de la población:

$$W_{t+1} = S \cdot W_t + N_t$$

donde:

W_t, sería una matriz de población cuyas filas denotan grupos de edad y cuyas columnas denotan regiones.

S, sería una matriz de sobrevivencia que es constante en el tiempo y en las *m* regiones del sistema.

N_t, una matriz de migración cuyas filas denotan grupos de edad, y cuyas columnas denotan regiones.

La aplicación de este modelo que tiene en cuenta la sobrevivencia, la fertilidad, y las migraciones, nos daría el número de niños, por grupos de edad, que para cada región o provincia pueden preverse en cada período de tiempo.

Tendremos que realizar tantas iteraciones de todo el proceso descrito como períodos queramos prever.