LA GEOMETRIA, MATERIA DE LENTA EMERGENCIA DESDE QUE EL ESCOLAR PERCIBE LAS FORMAS

Pertenece la Geometría a las ciencias matemáticas y sus orígenes se remontan a momentos históricos de gran pragmaticidad. Innominados aplicadores en Egipto, Thales, Pitágoras, Platón, Euclides, Arquímedes, Apolonio de Pérgamo, son los grandes paladines de la Geometría en las primeras épocas (1). Descartes, Desargues y Spinoza emiten su nombre en las interpretaciones de la Geometría o en la proyección del sistema geométrico a la Filosofía (2). Lobatchewski y Riemann como magníficos defensores de la Geometría no euclideana producen un magnífico rebote de la interpretación geométrica (3). Poincaré (4) destaca el principio de comodidad como el justificador de la Geometría euclideana junto a su simplicidad. Ciertamente, la Geometría euclideana, conforme se ha demostrado en estudios psicológicos (5), es la que más se acerca al pensamiento natural, a la visión homogénea y tridimensional. Las geometrías hiperplánicas no surgen con espontaneidad, ya que requieren un penoso esfuerzo de generalización por parte del estudioso o del que sobre ellas quiere pensar y, por otra parte, no son representables más que mediante artificios racionales pero no visibles de modo unitario.

Conforme nos dice Goblot: «Las matemátimas podrían ser denominadas las ciencias de la medida cuya expresión es el número. Todas sus proposiciones significan que estando supuestamente dadas ciertas medidas, ciertas otras medidas resultan de ellas por vía de la consecuencia racional... y así, sin hacer conocer lo real, son inmediatamente aplicables a lo real. Consideran primero la cantidad pura, es decir, la medida en general, independientemente de toda cosa mensurable... La única ciencia que puede ocupar el segundo lugar es la Geometría, porque el espacio es la *única cosa directamente mensurable*» (6). Para él el espacio no es más que la posibilidad indefinida de las figuras, dimensiones y situaciones. Distingue dos clases de propiedades geométricas: unas *descriptivas* que se refieren a las figuras, otras *métricas* que se refieren a las dimensiones» (7).

(1) RUDE, A.: *Metodología de la Geometría.* Labor. Barcelona, 1937, págs. 211 y siguientes.

(2) GODEAUX, G.: *Les geometries.* A. Collin. París, 1947.

(3) BONOLA, G.: *Geometrías no-euclideanas.* Espasa Calpe. Buenos Aires, 1923.

(4) POINCARE, H.: *El valor de la ciencia; Ciencia y método; La ciencia y la hipótesis.* Colección Austral, Espasa-Calpe. Buenos Aires, 1943-46.

(5) PIAGET, J.; INHELDER, B., y SZEMINSKA, A.: *La géometrie spontannée de l'enfant.* Press Universitaires de France. París, 1948.

(6) GOBLOT, E.: *El sistema de las ciencias.* El Ateneo. Buenos Aires, 1946, págs. 67-8.

(7) GOBLOT, E.: *El sistema.*. Op. cit., págs. 68-9.

Se acerca así a la postura kantiana: El espacio no es un concepto empírico sacado de experiencias externas; el espacio es una representación necesaria *a priori,* que está a la base de todas las intuiciones externas; el espacio no es un *concepto discursivo* o, según se dice, universal, de las relaciones de las clases en general sino una intuición pura; el espacio es representado como una magnitud infinita *dada*... Así, pues, la originaria representación del espacio es intuición *a priori* y no concepto (8).

Un matemático actual tan uncido a la axiomática como Gonseth (9) nos dirá de la Geometría: «Yo no sabría definir mejor la Geometría que diciendo: Es un *esquema mental* cuya significación exterior está entramada en el espacio físico o en el espacio sensible. En cuanto a la Geometría lógico-matemática, lo que le interesa especialmente es la estructura».

Con sentido de realidad nos dirá Foulquié (10): «Con la Geometría a la idea de cantidad se añade la noción de extensión: su objeto es la cantidad extendida».

Luego vemos que en cuanto a la posibilidad de aprendizaje de la Geometría hay que tener en cuenta: Aptitudes de intuición experiencial, aptitudes especiales, desenvolvimiento del proceso natural y superación por el racional, aptitudes descriptivas y métricas...

Estas aptitudes se precisan de un modo más simple en algunos de los tests elaborados para determinar el rendimiento geométrico. Así Minnick (11) en los primeros tiempos señaló las cuatro aptitudes fundamentales para uno de los procesos geométricos de mayor atractivo: la demostración formal, y propuso las siguientes: Aptitud para dibujar una figura para el teorema; aptitud para exponer correcta y exactamente la hipótesis y la conclusión del teorema; aptitud para recordar datos adicionales acerca de una figura cuando son dados uno o más datos, y aptitud para seleccionar entre los datos útiles aquellos que son necesarios para una prueba y ordenarlos hasta llegar a la deseada conclusión.

Otros autores (12) recogen con mayor amplitud y atonismo un cúmulo mayor de aptitudes para resolver adecuadamente las pruebas geométricas más en uso: Aptitud para visualizar o pensar en términos de imagen visual; aptitud para leer con sentido geométrico materia, teoremas y problemas; aptitud para usar el proceso básico requerido (a veces aritmético); aptitud para aplicar el procedimiento algébrico cuando lo requiera; aptitud para saber lo que va a ser probado; aptitud para empuñar lo dado en el

(8) KANT, M.: *Crítica de la razón pura.* V. Suárez. Madrid, 1928, pág. 32.

(9) GONSETH, F.: *La loi dans les sciences mathématiques.* En «Rey A.-Science et Loi». F. Alcan. París, 1934, pág. 32

(10) FOULQUIÉ, P.: *Logique et Morale.* L'Ecole. París, 1950, pág. 87.

(11) MINNICK, J. H.: *Certain abilities fundamentals to the study of Geometry.* «Journal of Educational Psychology», 1918, págs. 83-90.

(12) GREENE, H. A.; JORGENSEN, A. N., y GERBERICH, J. R.: *Measurement and evaluation in the Secondary School.* Longmans-Green. New York, 1942.

teorema; aptitud para proceder lógicamente; aptitud para recordar y seleccionar hechos útiles para la prueba; aptitud para descubrir errores en el razonamiento geométrico; aptitud para descubrir errores en el razonamiento calculador; aptitud para dibujar la figura requerida; aptitud para descubrir errores en las figuras geométricas; aptitud para hacer construcciones; aptitud para advertir errores constructivos, y aptitud para aplicar los principios.

En realidad, podemos afirmar que no se han concretado bien los objetivos didácticos de la Geometría, y por ello cabe hablar de distintas interpretaciones de la emergencia discente. Por esta razón nos parece oportuno recoger los tipos generales de actividad propuestos por Kinney (13) para la Geometría:

1. Geometría intuitiva, empleada cuando el alumno contempla una figura y descubre lo evidente, por ejemplo, la igualdad de los ángulos rectos.
2. Geometría experimental: Hacer coincidir los ángulos de un triángulo de papel para descubrir su suma.
3. Geometría de observación: que sensibiliza al alumno para las relaciones geométricas de su ambiente.
4. Construcciones geométricas, con regla y compás y con instrumentos de dibujo.
5. Demostraciones sencillas por medio de la prueba informal de hechos simples, deducir la suma de los ángulos de un cuadrilátero cuando se ha establecido la suma de los ángulos de un triángulo.

Y lo más extraordinario de estas clasificaciones de actividades es que corresponden a tendencias didácticas de un país en el que la Geometría no aparece dentro del marco ordinario de la primera enseñanza. La Geometría está vista no como la mera captación de formas geométricas, sino como situación mental que requiere la intervención de aptitudes significativas.

Por ello, cuando no confundimos la Geometría con la percepción de formas y con la determinación de semejanzas y diferencias formales el problema se complica. Nosotros ahora estamos de acuerdo con Puig Adam (14) cuando dice: «Pero la simple percepción de formas materiales estáticas no parece suficiente para la generación de nociones. No consisten éstas precisamente en remanentes residuales estratificados en nuestra memoria como resultado de una contemplación pasiva de tales realizaciones, sino que se originan sustancialmente por un proceso activo, por todo un dinamismo operacional (movimientos, proyecciones, coördinaciones, comparaciones, asociaciones, etc.) efectuado simultáneamente a su génesis».

---

(13) KINNEY, L. B.: *Enseñanzas de las Matemáticas.* En RIVLIN, N. N., y SCHELER, H.: «Enciclopedias de la educación moderna». Losada. Buenos Aires, 1946, págs. 167-168 del segundo tomo.

(14) PUIG ADAM, P.: *Didáctica matemática eurística.* Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral. Madrid, 1956, pág. 84.

Y aún seríamos más diferenciadores si dentro de la percepción de formas geométricas, incluso en su estatismo, distinguiésemos entre la retención de dichas formas como imagen grabada en nuestra mente a través de numerosos ejercicios y la comprensión de la forma geométrica llena de interés cuando su postura es distinta o cuando se presenta incluída en un conjunto de varias formas. Nosotros no podemos olvidar que si respecto del factor espacial de la inteligencia existen diferencias notables entre niños y niñas (15), en favor de los primeros, también hay distinto grado de captación y por ello se posibilita la existencia de emergencias diversas. (En niños se aprecia a los siete años y en niñas no.)

Reconocimientos de formas geométricas concretas

Por formas geométricas concretas entendemos aquellos objetos de juego parvular e infantil cuyas formas son puramente geométricas. No nos importa ahora si el niño es capaz de percibir relaciones entre sus elementos o si puede captar sus propiedades métricas o su simetría. Estos últimos elementos son precisiones científicas que nos serán de fundamental interés, pero que no deben confundirse con los objetos construídos geométricamente.

La emergencia para la percepción de estas formas aparece ya antes de los cuatro años. El niño es capaz de distinguir entre un disco en forma de circunferencia, entre un triángulo y un cuadrado. El niño diferencia entre un prisma recto bien alargado, un cubo y un cilindro. No confunde éstos con la esfera y el cono. Las diferencias son muy radicales y han dado lugar a los famosos «dones» de Froebel (16) para juegos en el parvulario.

El pequeño juega con los objetos, los clasifica, los ordena por tamaño, forma, figuras geométricas, sin saberlo, y produce de modo creador construcciones verticales u horizontales. Incluso de su modo de formación: combinación de formas y colores se pueden obtener datos de orientación clínica.

Sólidos y formas geométricas constituyen el fundamento del sistema de Montessori (17) que tanta difusión ha tenido, a pesar de la carestía material, por todo el mundo. Y nadie discute la posibilidad de que el niño diferencie entre las formas incluídas en dichos materiales e incluso que pueda llegar a denominar con precisión algunas de ellas.

---

(15) Anastasi, A., y Foley, J. P.: *Differential Psychology*. Mac Millan. New York, 1954, pág. 517.

(16) Guillen de Rezzano, C.: *Los jardines de infantes*. Kapelusz. Buenos Aires, 1946, págs. 15 y siguientes.

(17) Montessori, M.: *Psicogeometría*. Araluce. Barcelona, s. a.

Regletas prismáticas en colores constituyen la base del nuevo «sistema Cuisenaire» (18) para la enseñanza de la aritmética desde los primeros años hasta el Bachillerato. En ellos se combinan formas y colores procurando mantener una relación entre las regletas representativas de tres tipos fundamentales de series con los dígitos a través de colores próximos.

Luego, con simple denominación o innominadas, el niño es capaz de percibir formas geométricas como diferentes. Por otra parte, dada su inicial indiferenciación del sentido de las figuras las capta globalmente en cualquiera de las posturas en que se le presente. Este resultado experiencial ha hecho innecesarios estudios para averiguar si dicha aptitud desaparecía o tenía un momento de debilitación al sobrepasar el momento de las diferenciaciones de sentido.

Mas nosotros *renunciamos a admitir* como captación geométrica los hechos que hemos citado para el parvulario. Su descripción corresponde más bien a la observación de formas y colores, de la cual no hablamos ahora. El niño es capaz de reconocer la forma de un cuadrado y de dibujarlo y no obstante no haber percibido la relación existente entre los lados del cuadrado. Estudios psicológicos sobre la percepción de las formas hacen ver cómo se mantiene la tendencia general de los sujetos hacia las formas simétricas.

Por otra parte, y desde lo didáctico, parece más útil pensar en la Geometría no como manejo de objetos concretos, sino como utilización de figuras de la misma clase. Esta utilización, conforme veremos, es posterior a la simple diferenciación y reorientación de tarugos, rombos, etc.

Geometría espontánea en el niño

Los estudios de Piaget y sus colaboradores (19) respecto de la Geometría, continuación de los hechos con la cantidad y el número, han demostrado cierto sentido de equivalencia activa en los hallazgos. «La intuición geométrica es esencialmente activa: consiste ante todo en acciones virtuales, esquemas abreviados de acciones anteriores afectivas o esquemas anticipadores de acciones ulteriores, y cuando la acción está en defecto la intuición se vuelve corta. Desde las razones elementales de orden (objetos a alinear en los dos sentidos), de envolturas (nudos) o las razones proyectivas (perspectivas a reconstituir, sombras a proyectar, haces a seccionar, superficies a rebatir, etc.) afines (rectángulos alargables), hasta las semejanzas y con-

(18) CUISENAIRE, G., y GATTEGNO, C.: *Les nombres en couleur.* Delachaux-Niestlé Neuchatel. París, 1955, págs. 16 y siguientes.

(19) PIAGET, J.: *La construction du réel chez l'enfant.* Delachaux et Niestlé Neuchatel, 1937. Ibidem: *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant.* Press Univ. de France. París, 1946. Ibidem e INHELDER, B.: *La representation de l'espace chez l'enfant.* Press Univ. de France. París, 1948. PIAGET, J.; INHELDER, B., y SZEMINSKA, A.: *Le géométrie spontanée de l'enfant.* Press. Univ. de France. París, 1948.

juntos a coordenar en planos, todas las formas de la intuición espacial que hemos estudiado, reposan sobre acciones» (20).

En la misma obra nos dirán: «El niño percibe de la misma manera que nosotros un cono y un cilindro independientemente de la acción de desarrollar las superficies: los ve como nosotros en tres dimensiones, conoce la base circular y el «vértice» circular o puntiagudo, percibe como nosotros las superficies laterales curvadas. Lo que no aprehende cuando se le pide el desarrollo, no son las formas de las superficies como tales, sino únicamente sus desplazamientos respectivos y su ordenación sobre un solo plan: son acciones que no imagina hasta el nivel III B» (21).

En la segunda parte de la obra: La Geometría espontánea del niño recogen numerosos análisis clínicos sobre: Representación de los desplazamientos, medida espontánea, construcción de relaciones de distancia, conservación de longitudes con desplazamiento de objetos y relación entre longitudes y distancias, conservación de longitudes fuera de la deformación de líneas a comparar, medida de longitudes, determinación de un segmento sobre una recta, determinación de un punto sobre un plano o en un espacio, medida de ángulos, medida de triángulos, suma de ángulos de un triángulo, lugares rectilíneos y el círculo, curvas mecánicas y representación de movimientos compuestos, sustracción de superficies parciales congruentes a dos superficies totales iguales, conservación y medida de superficies, partición de superficies, duplicación de superficies y volúmenes, conservación y medida de volúmenes. En todos los estudios mantiene Piaget su postura conocida en la matemática desde la construcción activa de lo matemático y la noción de conservación como discriminativa.

Aunque no podamos afirmar que en cada uno de los casos la madurez emergente es la misma si podemos encontrar una especie de tendencia general, anticipo de los tres estadios o mesetas de la construcción euclideana. Esta tendencia general de los estudios es la no aparición decisiva de los momentos de emergencia geométrica antes del III estadio de Piaget —recordemos que el primero es el preescolar (de una a cuatro años), el segundo de cuatro a siete y el tercero se inicia a partir de los siete años cumplidos, más cerca de los ocho—. Luego desde una perspectiva simplista podríamos aceptar las sugerencias del prólogo (22): «El estudio del desenvolvimiento de la medida es tan complejo que se logra solamente entre los ocho y los once años».

(20) PIAGET, J., e INHELDER, B.: *La représentation*... Op. cit., pág. 537.
(21) PIAGET, J., e INHELDER, B.: *La représentation*... Op. cit., pág. 337.
(22) PIAGET, J..; INHELDER, B., y SZEMINSKA, A.: *La géometrie spontanée*.. Op. cit., pág. 7.

Nociones fundamentales de formas geométricas

En un estudio, casi simultáneo al de Piaget, hecho por Mortier (23) con técnicas experimentales de índole masiva, aunque aplicadas a no muchos sujetos, se han logrado resultados en cierto modo coincidentes con los de Piaget, pero de mayor interés por centrarse en situaciones más próximas a las puramente escolares.

Estudia Mortier el problema con gran sentido de independencia. No le preocupan las relaciones con otras ramas y ni siquiera trata de captar todo el problema geométrico, ya que se reduce a la Geometría plana. Sus conclusiones estarán más llenas de sugerencia que de carácter definitivo, ya que emplea pruebas sin determinar su validez ni su confianza, pero en nuestro criterio integrador cabe como la expresión plena de un resultado actual. Por otra parte, por circunscribirse al armazón de las nociones geométricas, sus resultados son de mayor interés técnico. Su estudio es intencionalmente madurativo: busca averiguar cuál es el dominio escolar en cada edad para cada pregunta; determinar el momento de emergencia comprensiva y el tránsito entre lo que bajo nuestra denominación hemos clasificado como emergencia madurativa y crisis madurativa. (Ahora digamos que esto se referirá a un pequeño grupo de cuestiones fundamentalmente de reconocimiento de figuras y de trazo de alguna línea geométrica con presentación bien tradicional, bien variada. Y esto no es toda la Geometría, aunque constituya su mínimo esencial.) Pero nosotros más bien admitiríamos una mayor adecuación de términos a la madurez predispositiva y madurez emergente.

En cuadros detallados nos muestra Mortier (24) el umbral experimental de adquisición de ciertas nociones desde la comprensión. En estos umbrales podemos advertir su irregularidad. Los primeramente adquiribles se centran sobre el ángulo, seguido por el círculo.

Pero ahora nos interesan sus conclusiones: «La mayor parte de las nociones de formas geométricas son enseñadas prematuramente» (25). «Es inútil fatigar la memoria confiándole datos que la inteligencia no puede utilizar.»

Y cuando se pregunta sobre las demostraciones infantiles obtiene tres grupos generales: interpretación subjetiva de los datos, materialidad de los hechos y objetividad en el razonamiento. En el primer estadio impone su modo de concebir y resolver el problema. En el segundo apoya su razonar en el «control» métrico. En el tercero se advierte el principio de demostra-

(23) Mortier, J.: *L'enseignement des notions fundamentales de formes géometriques*. Cahier IX[ème] de la «Revue des Sciences Pédagogiques». Bruxelles, 1949.

(24) Mortier, J.: *L'enseignement*... Op. cit., págs. 71 y otras.

(25) Mortier, J.: Op. cit., pág. 108.

ción teoremática. Mas estas demostraciones indican que los desenvolvimientos racionales no están al alcance de los niños de doce a catorce años (26). Coincide así con la observación de Diesterweg (27), al afirmar que el niño de diez a doce años no está preparado para tales sutilezas.

No es preciso exigir razonamiento en la escuela primaria. Nos dirá poco después. Lo que en otros términos equivale a afirmar que el razonamiento geométrico no aparece con claridad dentro de los límites de la escolaridad obligatoria.

Los ejercicios deben iniciarse, por tanto, con la presentación material de formas y más tarde con la representación gráfica. Progresivamente el alumno será llevado a establecer juicios de relación simple y precisa.

En realidad existen un amplio intervalo entre el momento en que los escolares pueden adquirir una noción geométrica y el momento de su utilización. Intervalo que nosotros hacemos equivalente a tres años.

NORMAS PROVISIONALES

1.ª En la enseñanza de la Geometría hemos de distinguir entre adquisición de formas geométricas, relaciones métricas y demostraciones formales.

2.ª La adquisición de formas geométricas concretas puede iniciarse en el parvulario.

3.ª El dominio de lo geométrico exige en sus primeros estadios una coordinación de la agilidad del escolar por la intuición de imágenes.

4.ª Toda demostración geométrica debe presentarse didácticamente acompañada de la figura y proceso lógico correspondiente.

5.ª La demostración geométrica debe ser objeto de consideración detenida con niños de doce años de edad mental, si es demostración a partir de figuras.

6.ª Las demostraciones activas y experiencial pueden empezarse antes que la intuitiva (28).

José Fernández Huerta
Colaborador-científico del C. S. I. C.

---

(26) Mortier, J.: Op. cit., pág. 109.

(27) Diesterweg. Citado por Rude, A.: *Metodología de la Geometría.* Op. cit., página 228.

(28) Una ampliación de estas normas puede verse en: Fernández Huerta, J.: *El problema de la enseñanza de la Geometría en la Escuela primaria.* «Consigna», junio 1957; *Funcionalización didáctica de la Geometría.* «Consigna», septiembre, 1957; *Proyecto de adaptación de los cuestionarios de Geometría e Historia.* «Consigna», septiembre, 1957.