COMPARACION DE DOS METODOS PARA REALIZAR LA DIVISION DE ENTEROS (*)

Desde los pitagóricos hasta nuestros días se ha tratado de apreciar cuál sea el valor de las Matemáticas, en general, y de la Aritmética en la educación. Como no es difícil suponer, las opiniones han sido muy diversas.

El estudio de la aritmética exige la concentración del interés en la percepción de relaciones, por lo que resulta difícil al niño. Sin embargo, es considerada por el Dr. Fernández Huerta como «la única ciencia que se puede participar con rigor en la escuela» (1).

En cuanto a madurez hay que considerar la incomprensión infantil por falta de capacidad y la dificultad intrínseca del aprendizaje de la aritmética. Lo primero a conseguir es que el niño posea la idea de número. Podemos considerar el contar como un medio para conseguir la adquisición de este concepto, teniendo en cuenta los diferentes modos y grados de hacerlo.

Conseguido este concepto se puede iniciar al chico en las operaciones aritméticas. Cabe que esto se haga siguiendo el procedimiento tradicional, como aconsejan Hernández Ruiz y Tirado Benedí (2) o bien introducir las cuatro operaciones conjuntamente, según opina el profesor Fernández Huerta, enseñando «todas las operaciones, pero no todos los aspectos y matices de cada operación» (3). Nos extenderíamos demasiado al intentar tratar de cada una de las operaciones aritméticas. Lo haremos sólo de la división por ser la que de manera especial nos ocupa. Por la mis-

---

* Queremos destacar nuestro reconocimiento a los Profesores García Hoz y Fernández Huerta por sus consejos y orientaciones.

(1) *Fundamentos didácticos de la aritmética.* Rev. Pedag. de la Sección Femenina «Consigna». Enero, 1956, pág. 21.

(2) *La ciencia de la educación.* Enciclopedia pedagógica, 2.ª edición, Atlant. s. a., Méjico.

(3) Las primeras operaciones aritméticas *Consigna,* marzo 1956, pág. 27.

ma dificultad que la operación entraña su enseñanza ha de ser cuidadosa.

Reed opina que para su aprendizaje «el mejor método es el que se use más frecuentemente y se practique más» (4). No estamos plenamente de acuerdo con él y por lo mismo nos hemos propuesto la comparación del centroeuropeo con el español, que consideramos distintos en cuanto al proceso seguido para realizar la operación y en el modo de presentarla.

La experimentación se ha llevado a cabo con alumnos del Grupo Escolar Zumalacárregui, de Madrid, comprendidos en los grados 6.°, 7.° y 8.° por ser los más adecuados dada la edad (siete a once años) y situación en la enseñanza de la Aritmética de los escolares. Durante el tiempo que ha durado la investigación no han recibido más enseñanza en esta materia que la dirigida para todos de igual manera, procurando igualdad de circunstancias.

Ante la dificultad de encontrar grupos equivalentes se pensó en la enseñanza de ambos procedimientos—centroeuropeo y español—en días alternos, a todos los alumnos elegidos. Las clases eran de treinta minutos y durante la primera parte de la jornada escolar, procurando hacerlo de manera que los tres grados se encuentren en las mismas condiciones respecto de la hora en que les han correspondido las clases. No se ha dado por terminada la enseñanza hasta que cada grado había logrado aprender igual número de días por uno y otro método.

El primer día de clase se aplicó el test diagnóstico de combinaciones de división, del Dr. Fernández Huerta, para conocer la situación en que se encontraban los escolares en el aspecto más simple de la división. (Los resultados pueden verse en el trabajo original: Comparación de dos métodos para realizar la división de enteros. Memoria de Licenciatura inédita. Universidad de Madrid, 1956). Al día siguiente realizaron la prueba construída para la investigación, comprendiendo diez operaciones de dividir, siguendo las gradaciones de dificultad señaladas por el profesor Fernández Huerta (5).

(4) *Psicología de las materias de Enseñanza Primaria.* UTEHA. Méjico, 1949, página 358.

(5) Formas de la división aritmética y gradación de las dificultades. *Bordón*, número 51, marzo 1955, págs. 149-162.

Después de doce sesiones de clase insistiendo en lo que le suponía mayor dificultad, se aplicó el test diagnóstico como prueba de madurez. A continuación se dieron dieciocho sesiones más de clàse y se aplicó el test final.

Resultados de la investigación: su interpretación

Con el fin de aprovechar al máximo los resultados y al mismo tiempo simplificarlos hemos seguido el diseño factorial 2 × 2.

Obtenidos los primeros resultados se observó que existían diferencias entre las distintas pruebas aplicadas y los distintos procedimientos empleados. Cabía la posibilidad de atribuirlo al azar. Para salir de esta duda se realizaron las pruebas de homogeneidad de medias obtenidas.

Como al ejecutar la primera prueba los niños sólo conocían el procedimiento español, hemos comparado los resultados de la segunda y tercera pruebas. Hemos comparado rapidez y exactitud y de aquí que presentemos tablas diferentes, según se trate de una u otra.

El proceso seguido en la determinación de la homogeneidad de medias alargaría mucho el trabajo. En cambio, creemos conveniente detallar solamente las Tablas obtenidas en el análisis de varianza.

TABLA I.—*Análisis de varianza en el estudio de la homogeneidad de medias. Grado 8.º. Pruebas segunda y tercera. Métodos A y B. Exactitud*

Origen de varianza	Suma de cuadrados	G. L.	Cuadrado medio	F.	Hipótesis
Entre grupos. .	71,03	3	23,6	3,5	Rech.
Dentro de grupos	842,94	128	6,6		
TOTAL	913,97				

F es el cociente entre los cuadrados medios y según las tablas de Snedecor ha de ser mayor que 1. Teniendo en cuenta que el nivel obtenido en esta tablas es al 5 por 100, rechazamos la hipótesis de medias. Su diferenciación no puede atribuirse a factores fortuitos, sino que alguna de las medias obtenidas es cienticamente diferenciable de la media general.

TABLA II.—*Análisis de varianza en el estudio de la homogeneidad de medias. Grado 8.º Pruebas segunda y tercera. Métodos A y B. Rapidez.*

Origen de varianza	Suma de cuadrados	G. L.	Cuadrado medio	F.	Hipótesis
Entre grupos ..	825,2	3	275,06	34,2	Rech.
Dentro de grupos	1027,8	128	8,02		
TOTAL	1853,0				

El valor obtenido para f es un nivel al 1 por 100, pudiendo afirmarse lo mismo que de la exactitud.

TABLA III.—*Análisis de varianza en el estudio de la homogeneidad de medias. Grado 7.º Pruebas segunda y tercera. Métodos A y B. Exactitud.*

Origen de varianza	Suma de cuadrados	G. L.	Cuadrado medio	F.	Hipótesis
Entre grupos ...	162,6	3	54,2	6,7	Rech.
Dentro de grupos	1146,2	142	8,07		
TOTAL	1308,8				

TABLA IV.—*Análisis de varianza en el estudio de la homogeneidad de medias. Grado 7.º Pruebas segunda y tercera. Rapidez.*

Origen de varianza	Suma de cuadrados	G. L.	Cuadrado medio	F.	Hipótesis
Eutre grupos....	2064,2	3	688,06	23,8	Rech.
Dentro de grupos	4094,8	142	28,8		
TOTAL	6159,0				

En el grado 7.º encontramos los niveles al 1 por 100 tanto en rapidez como en exactitud.

Lo mismo podemos advertir en el 6.º grado, por lo que, sin lugar a dudas, afirmamos que existe una heterogeneidad de medias muy significativas científicamente.

TABLA V.—*Análisis de varianza en el estudio de la homogenidad de medias. Grado 6.º Pruebas segunda y tercera. Métodos A y B. Exactitud.*

Origen de varianza	Suma de cuadrados	G. L.	Cuadrado medio	F.	Hipótesis
Entre grupos	398,7	3	132,9	14,9	Rech.
Dentro de grupos.	1291,3	156	18,9		
TOTAL	1690,0				

TABLA VI.—*Análisis de varianza en el estudio de la homogeneidad de medias. Grado 6.º Pruebas segunda y tercera. Métodos A y B. Rapidez.*

Origen de varianza	Suma de cuadrados	G. L.	Cuadrado medio	F.	Hipótesis
Entre grupos....	1011,8	3	337,7	15,1	Rech.
Dentro de grupos	3492,9	156	22,3		
TOTAL......	4504,7				

Podemos completar nuestro estudio pretendiendo encontrar la heterogeneidad de varianzas.

Como ya hicimos anteriormente, sólo expondremos los últimos resultados con el fin de no prolongar excesivamente el trabajo.

8.º *Grado.—Exactitud.*

26'25 : 4 = 6'25 ; log. 6'25 = 0'816904
0'816904 × 4 = 3'267616 ; 3'267616 — 3'262219 =
0'0053 ; 2'3026 × 32 × 0'0053 = 0'3375.

Rapidez.

32'11 : 4 = 8'02; log. 8'02 = 0'904104;
0'904104 × 4 = 3'616696; 3'616696 — 3'589053 =
0'02763; 2'3026 × 32 × 0'0276 = 0'1472;

Teniendo en cuenta que en los grados 7.° y 6.° no han realizado las pruebas segunda y tercera el mismo número de alumnos empleamos la fórmula de Barttlet, que sólo presenta algunas variantes respecto de la anterior, obteniéndose resultados que, como veremos a continuación, muestran que no ha existido anormalidad alguna.

7.° Grado.—Exactitud.

1120'3 : 142 = 7'88; log. 7'88 = 0'896526;
0'896526 × 144 = 127'305692; 127'305692 —
125'585773 = 1'719919; 1'719919 × 2'3026 = 3'9330

Rapidez.

4641'3 : 142 = 32'68; log. 32'68 = 1'514282;
1'514282 × 144 = 217'028044; 217'028044 —
213'788719 = 3'239325; 3'239325 × 2'3026 = 7'4270

6.° Grado.—Exactitud.

1339'2 : 156 = 8'58; log. 8'58 = 0'933487;
0'933487 × 156 = 145'622972; 145'622972 —
143'615062 = 2'0079; 2'0079 × 2'3026 = 4'7161;

Rapidez.

3233'1 : 156 = 20'72; log. 20'72 = 1'316390;
1'316390 × 156 = 205'356840; 205'356840 —
201'978454 = 3'378386; 3'3783 × 2'3026 = 7'7510.

En uno y otro grado encontramos los niveles al 5 por 100 que nos muestran la no existencia de anormalidad.

Una vez comprobada la heterogeneidad real entre las medias pasamos al análisis de varianza completo, intentando determinar la superioridad de un método sobre otro, superioridad de aprendizaje, y, al mismo tiempo, su interacción.

TABLA VII.—*Grado 6.º—Exactitud.*

Origen de varianza	Suma de cuadrados	G. L.	Cuadrado medio	F.	Hipótesis
Aprendizaje......	342,4	1	342,4	38,9	Rech.
Métodos	2,5	1	2,5	0,28	Acep.
Interacción.....	53,8	1	53,8	6,1	Rech.
Dentro de grupos.	1291,3	146	8,8		
TOTAL	1690,0				

TABLA VIII.—*Grado 7.º—Exactitud.*

Origen de varianza	Suma de cuadrados	G. L.	Cuadrado medio	F.	Hipótesis
Aprendizaje	158,2	1	158,2	19,7	Rech.
Métodos	3,3	1	3,3	0,41	Acep.
Interacción.......	1,1	1	1,1	0,13	Acep.
Dentro de grupos.	1142,2	143	8		
TOTAL ...	1308,8				

Se advierte una superioridad en aprendizaje. La hipótesis de homogeneidad ha de ser rechazada al encontrar un nivel al 1 por 100. En cambio, el valor F no es científicamente significativo para una superioridad de métodos y para la interacción. En el Grado 6.º es significativo el valor encontrado en la interacción.

TABLA IX.—8.º *Grado.—Exactitud*

Origen de varianza	Suma de cuadrados	G. L.	Cuadrado medio	F.	Hipótesis
Aprendizaje.	53,4	1	53,4	8,09	Rech.
Métodos.........	9,8	1	9,8	1,48	Acep.
Interacción......	7,8	1	7,8	1,18	Acep.
Dentro de grupos	842,9	128	6,6		
TOTAL	913,9				

Sólo encontramos un valor significativo en cuanto a superioridad de aprendizaje.

TABLA X.—6.° *Grado.—Rapidez.*

Origen de varianza	Suma de cuadrados	G. L.	Cuadrado medio	F.	Hipótesis
Aprendizaje.	766,8	1	766,8	32,08	Rech
Métodos	192,8	1	192,8	8,04	Rech.
Interacción..	52,8	1	52,8	2,25	Acep.
Dentro de grupos	3492,9	146	23,9		
Total	4504,7				

Parece evidente que en 6.° Grado existe la superioridad de un método sobre otro, pues encontramos un valor significativo para F al 1 por 100, y lo mismo en cuanto a aprendizaje, no ocurriendo así en la interacción.

TABLA XI.—7.° *Grado.—Rapidez*

Origen de varianza	Suma de cuadrados	G. L.	Cuadrado medio	F.	Hipótesis
Aprendizaje .. .	1372,5	1	1372,2	47,6	Rech
Métodos...... .	128,5	1	128,5	4,4	Rech
Interacción	536,5	1	536,5	19,5	Rech.
Dentro de grupos	4094,8	142	28,8		
Total	6159,6				

Hemos obtenido los niveles al 1 por 100, al 5 por 100, y al 1 por 100, respectivamente.

TABLA XII.—8.º *Grado.—Rapidez.*

Origen de varianza	Suma de cuadrados	G. L.	Cuadrado medio	F.	Hipótesis
Aprendizaje ..	742,1	1	742,1	92,7	Rech.
Método	55,2	1	55,2	6,9	Rech
Interacción..	27,9	1	27,9	3,4	Acep.
Dentro de grupos.	1027,8	128	8,02		
TOTAL	1853,0				

El influjo de interacción no resulta significativo, pero sí el valor de F para la superioridad de aprendizaje y de métodos.

CONCLUSIONES

A) Los resultados obtenidos al hallar la homogeneidad de medias nos han puesto de relieve la existencia de una heterogeneidad de medias en general.

B) El estudio de la homogeneidad de varianzas demuestra que las condiciones de los alumnos han permanecido normales a través de todo el tiempo que ha durado la investigación. La variación de los valores obtenidos puede atribuirse al margen del muestreo fortuito.

C) El análisis de varianza completo muestra una diferenciación en el aprendizaje, común a todos los grados. Sin embargo, no podemos generalizar respecto de la superioridad de un método sobre otro, ni de la interacción método-aprendizaje.

Estudiando estas variaciones puede observarse:

1. Que la enseñanza ha sido eficiente.

2. En términos generales podemos admitir un progreso más rápido en exactitud a favor del método centroeuropeo.

3. En cuanto a rapidez existe una notable superioridad del sistema centroeuropeo sobre el español.

Detallando podemos concluir:

I.—*Exactitud.*

a) La enseñanza de la división a sujetos de siete a once años por los métodos centroeuropeo y español ha sido eficiente y realizada en condiciones normales de aprendizaje.

b) No puede hablarse de una superioridad científica de un método sobre otro en cuanto a exactitud.

c) Hay una tendencia no significativa a favor del centroeuropeo.

II.—*Rapidez.*

a) Al finalizar la enseñanza es muy significativo el progreso en rapidez.

b) Dado que el sistema centroeuropeo de división era totalmente desconocido por los alumnos, se advierte que es mayor en él la velocidad para realizar las operaciones que en el español.

Si en exactitud han resultado las diferencias no significativas científicamente, sí lo han sido en rapidez. Cabría, pues, pensar en posibilidad de establecer este sistema en nuestras escuelas.

SOLEDAD DOMÍNGUEZ
Licenciada en Pedagogía.