EL CRITERIO INTRINSECO EN LA DETERMINACION DE NORMALIDAD DENTRO DE LA EXPERIMENTACION DIDACTICO - PEDAGOGICA

Dado el incremento de las investigaciones experimentales en el marco de nuestra Pedagogía, nos hemos visto obligados a bosquejar criterios que faciliten la evaluación de dichos estudios o que encaucen la indagación con rigor científico. Ya en nota anterior (1) destacamos la hipótesis de normalidad por la amplitud de su uso y por su fundamento metodológico. En ella lo extraordinario tiene menos probabilidades de aparecer que lo ordinario. Supone igualdad relativa de superdotados e infradotados y hace equivalente la probabilidad de aparición de sujetos equidistantes de la puntuación central. La transformación técnica de esta hipótesis permite determinar «a posteriori» las calificaciones de los sujetos brillantes en una materia escolar con la condición de que la probabilidad de que dichos escolares sean superados por otros sea realmente mínima.

Supuesta la normalidad en la población de escolares, se admite que *esta muestra* aleatoria es representativa de la población si al ser estudiada aparecen las notas de normalidad en los datos muestrales. Para encontrar esas notas de normalidad indicamos como primer criterio el denominado intrínseco por apoyarse en momentos o posiciones de la misma distribución normal. No se recurre en él a comparaciones con otras distribuciones, sino al estudio analítico de la función de distribución normal y al señalamiento de unos parámetros, que comparados con los muestrales permiten comprobar con claridad si los ajustes o desajustes se deben a la fluctuación aleatoria. También incluímos una mixtificación del anterior por medio de la prueba de significación de Gosset-Fisher, identificable en el infinito con la normal.

Indicábamos entonces que el criterio extrínseco de mayor utilización, cuando se pretende determinar la normalidad de un grupo de escolares, es el consistente en aplicar la distribución χ^2 al contraste entre los resultados muestrales y los teóricos. Se constituye en criterio de normalidad cuando las frecuencias teóricas correspondientes a cada clase o intervalo se obtienen directamente de la distribución normal.

La misión de χ^2 en este caso consiste en determinar, con prueba de significación, si las diferencias existentes entre la distribución muestral y la normal se pueden considerar como aleatorias o no.

---

(1) Véase «R. E. de P.» núm. 44, págs. 517-527.

El estadigrafo χ^2 correspondiente a la distribución

$$y = y_0 \, e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \, (\chi^2)^{\frac{G.l-1}{2}}$$

y puede definirse operatoriamente como

$$\Sigma \frac{(f_m - f_t)^2}{f_t}$$

en el que la f_m representa las frecuencias muestrales y f_t las frecuencias teóricas. El sumatorio que inicia la fórmula indica que han de ser sumados todos los cocientes encontrados.

En realidad, el criterio extrínseco puede aplicarse a toda hipótesis cuyas frecuencias teóricas sean conocidas, ora por la imposición subyacente, ora por el desenvolvimiento propio de la distribución admitida. Por ello, cuando se pretende contrastar una distribución binomial, de Poisson, t... cabe calcular los valores teóricos correspondientes a dichas distribuciones y compararlos mediante la fórmula definitoria. La hipótesis nula nos obligará a determinar si el valor, de χ^2 hallado se puede considerar como el de la fluctuación propia de la aleatoreidad de la muestra. En el caso teórico extremo, $\chi^2 = 0$, cuando $f_m = f_t$, y χ^2 aumentará de valor conforme todos o algunos de los cocientes $(f_m - f_t) : f_t$ incrementen su cuantía.

En el caso de una distribución binomial con $p = q = 0{,}5$, puede proponerse la comparación de frecuencias reales o muestrales con las diferencias teóricas averiguadas mediante el triángulo de Tartaglia, ya que al igualarse p y q, el desarrollo binomial se convierte en

$$\frac{N}{2^n}\left[1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots\cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + 1\right]$$

Pero si la distribución no es binomial o si $p \neq q$ (lo que es más probable) no es conveniente aprovecharse de la aparente sencillez del triángulo combinatorio, ya que los productos varían de probabilidad, aunque al crecer la muestra disminuya la asimetría en la binomial.

Centrados de nuevo en el criterio de normalidad, nos parece que el camino más viable consiste en el abandono de la discusión teórica de la distribución junto a la ejemplificación de un problema didáctico reducido a términos precisos para este estudio.

En la indagación experimental se presenta más de una vez un problema como el siguiente:

En una población escolar, supuesta normal e indefinida, se ha aplicado una prueba de instrucción aritmética a una muestra aleatoria de

290 sujetos, y se pretende comprobar si las puntuaciones verdaderas se ajustan o no a una distribución normal.

En la tabla I presentamos, debidamente clasificadas para facilitar la labor posterior, las puntuaciones verdaderas de los 290 sujetos examinados.

TABLA I.- DISTRIBUCION MUESTRAL

Intervalos...	40 44	45 49	50 54	55 59	60 64	65 69	70 74	75 79	80 84	85 89	90 94	95 99
Frecuencia...	1	3	6	12	35	66	70	47	26	14	8	2

$N = 290$ $\bar{X} = 71{,}41$ $S = 9{,}15$

HIPÓTESIS DE TRABAJO

Dado que el problema actual se centra en la comprobación de la normalidad de la distribución de frecuencias muestrales, no surge ninguna dificultad teórica que nos impida admitir la hipótesis de trabajo siguiente: La media y desviación típica halladas corresponden exactamente a la media y desviación típica de la población. Es decir, definimos una distribución normal cuyos dos primeros momentos sean, respectivamente, 71,41 y $(9{,}15)^2$.

FRECUENCIAS TEÓRICAS

Conforme se desprende de la fórmula de χ^2, es necesario conocer las frecuencias reales, obtenidas directamente de la tabla I, y las frecuencias teóricas, que han de ser calculadas con las limitaciones antedichas de media y varianza fijas.

Conocidas la media y la varianza, se puede formalizar una curva de distribución de modo tal que sea posible determinar el área correspondiente a la porción de distribución comprendida entre los límites de cada intervalo. Así, si utilizamos los valores más conocidos de $k\sigma$, diríamos: El área comprendida entre la puntuación 71,41 y 80,56 es de 34,13 por 100 de todos los casos; el área comprendida entre 80,56 y 89,71 es de 13,59 por 100, es decir, el porcentaje de sujetos comprendidos en la rama superior de la curva de distribución entre uno y dos sigma de la media.

Pero en nuestro caso actuamos limitados por los extremos de cada intervalo, que bajo el supuesto de magnitud continua se obtienen mediante la adición de $\pm$ 0,5 a los límites (99-45;...;44-40) del intervalo de puntuaciones verdaderas. El conocimiento del porcentaje de la función de distribución correspondiente a cada intervalo se averigua mediante la diferencia de la porción de sujetos comprendidos bajo cada uno de los dos límites.

Aunque en la tabla II ofrecemos los resultados obtenidos cuando se pretende determinar las frecuencias teóricas, queremos explicar una de sus partes para que sea más fácil la aplicación del método.

TABLA II.-OBTENCION FRECUENCIAS TEORICAS

Puntuación superior	Z	Area	Diferencia	N x Dif f_t
+99,50	∞	100,00	0,11	0,32
99,50	3,07	99,89	0,48	1,39
94,50	2,52	99,41	1,80	5,22
89,50	1,98	97,61	5,25	15,22
84,50	1,43	92,36	11,30	32,77
79,50	0,88	81,06	17,75	51,48
74,50	0,34	63,31	21,63	62,73
69,50	−0,21	41,68	19,32	56,03
64,50	−0,76	22,36	12,68	36,77
59,50	−1,30	9,68	6,46	18,73
54,50	−1,85	3,22	2,40	6,96
49,50	−2,40	0,82	0,66	1,91
44,50	−2,94	0,16	0,14	0,41
−39,50	−3,59	0,02	0,02	0,06

Sumados 0,50 a cada extremo superior de intervalo, encontramos las siguientes puntuaciones máximas: 99,50; 94,50; .. ; 44,50. Dado que la distribución normal se ha tabulado cuando la media es 0 y la desviación típica es 1, el primer paso consiste en tipificar esos valores extremos. Hemos de recordar que esta tipificación no supone normalización, sino que la repartición de las puntuaciones se mantiene idéntica a como estaba antes de variar el origen y la unidad.

Puesto que la fórmula de tipificación es

$$z_i = \frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}$$

hemos de aplicarla a cada valor extremo. Así, para 99,50 obtendríamos

$$z = \frac{99{,}50 - 71{,}41}{9{,}15} = 3{,}07$$

para $x = 94{,}50$ $z = (94{,}50 - 71{,}41) : 9{,}15 = 2{,}52$, y así sucesivamente.

Tipificada la variable, sólo se necesita buscar en la tabla de distribución normal el área correspondiente a tal z. En el «Formulario y tablas de estadística» de García Hoz, págs. 35-42, se encuentran para 3,07 y 2,52 los siguientes valores: 0,4989297 y 0,4941323, aproximables con menor precisión a 0,4989 y 0,4941. Dado que esta tabla sólo nos ofrece la mitad de la función de distribución, hemos de añadirle 0,50 y multiplicar por 100 el resultado para obtener la columna tercera, que denominamos área. La diferencia entre estos dos porcentajes igual a 0,48 es el valor porcentual que buscábamos. Este 0,48 significa que el 0,48 por 100 de los sujetos examinables, si la distribución fuese normal con media 71,41 y desviación típica 9,15, han de alcanzar una puntuación entre 99,50 y 94,50000...1. Igual deben interpretarse las otras diferencias, pero para mayor claridad trataremos especialmente los extremos: más de 99,50 y menos de 39,500...1. Los límites superior e inferior serán ahora más infinito y menos infinito. Es decir, todos los sujetos estarán bajo más infinito y ninguno bajo menos infinito.

El procedimiento diferencial no puede ser más sencillo. En el primer caso restamos de 100 el porcentaje 99,89 que ha de dar puntuación igual o inferior a 99,50, y en el segundo determinamos el porcentaje de sujetos con puntuación igual o inferior a 39,50.

Pero estas diferencias valen exactamente lo mismo cuando el número de sujetos es de 30, que de 200 o 2.000, porque en ellas no aparece el número de escolares. Si queremos contrastar la frecuencia teórica con la muestral hemos de transformar las diferencias de la cuarta columna de la tabla II en frecuencias teóricas mediante el artificio de multiplicar los valores diferenciales por el número de sujetos, en nuestro caso 290. Así obtendremos la columna número 5, en la que se ofrecen las frecuencias esperables cuando la muestra hubiese sido perfecta y exactamente normal.

Una vez conocidas las frecuencias teóricas y muestrales nada más hay que aplicar la fórmula definitoria de χ^2 para determinar el ajuste.

Utilicemos ahora la tabla III.

TABLA III. - OBTENCION χ^2

Puntuación	f_m	f_t	$(f_m - f_t)$	$(f_m - f_t)^2$	$(f_m - f_t):f_t$
Mayor 94,5	2 } 10	1,71 } 6,93	3,07	9,4249	1,357
94 - 90	8	5,22			
89 - 85	14	15,22	−1,22	1,4884	0,098
84 - 80	26	32,77	−6,77	45,8329	1,405
79 - 75	47	51,48	−4,48	20,0704	0,390
74 - 70	70	62,73	7,27	52,8529	0,843
69 - 65	66	56,03	9,97	99,4009	1,774
64 - 60	35	36,77	−1,77	3,1329	0,085
59 - 55	12	18,73	−6,73	45,2929	2,413
54 - 50	6	6,96			
49 - 45	3 } 10	1,91 } 9,34	0,66	0,4356	0,047
Menor 44,5	1	0,47			

$\chi^2_{6\,(05)} = 12,592$ mayor que $\chi^2 = 8,412$

En la columna de las f_m se han anotado las frecuencias muestrales, y en la f_t, las acabadas de obtener o teóricas. Diferencias, cuadrados y cocientes constituyen las otras tres columnas. Todas estas operaciones, realizadas con la aproximación estaditica requerida por el caso, han producido el resultado 8,412 para la χ^2 buscada.

Un buen observador habrá advertido que el número de diferencias tabuladas es de nueve, tres menos de las que esperaríamos obtener, ya que el número de intervalos considerado finalmente era 12. Esta reducción se ha producido por la fusión de dos clases de valor superior a la media y tres clases de valor inferior. De este modo nos encontramos con que la amplitud de los intervalos es diferente, lo que preocuparía a quien desconociese esta distribución; pero en ella está permitido agrupar los casos de modo arbitrario.

Mas no ha de creerse que lo hemos hecho sólo por la arbitrariedad anunciada, sino porque se aconseja que ninguna de las frecuencias teóricas sea menor de 5 (aunque algunos exijan 10). También es aconsejable, para que el error estimativo sea mínimo, que el número de sujetos considerado no sea inferior a 50 (para otros, 100).

Una vez alcanzado el valor de la tabla III hemos de decidir si la hipótesis inicial: «La distribución muestral es normal», ha de ser aceptada o rechazada. Para ello hemos de utilizar la tabla IV, tomada de Fisher, y presentada por no serlo en el «Formulario y tablas» anteriormente citado. En esta tabla IV encontramos dos abreviaturas: P. y G. l. La primera nos dice la probabilidad de que hallemos un valor de χ^2 superior al ofrecido en la columna. G. l. significa el número de grados de libertad asignables a la distribución estudiada. En nuestro caso será de seis, ya que el número de parámetros admitidos es de dos, y el número de intervalos finalmente considerados es nueve. Hemos de recordar que hemos operado con dos condiciones: media y desviación típica, definidas a partir de la muestra; así, pues, tanto la puntuación final, suma de todos los sujetos, como la suma de los cuadrados de las diferencias de las puntuaciones a la media, han sido fijados por nosotros, por lo que se reduce el número máximo posible de grados de libertad.

Conocidos los grados de libertad con los que debemos de considerar la distribución de la χ^2, basta con determinar en las tablas la probabilidad correspondiente. Si en nuestro ejemplo hubiésemos encontrado una χ^2 mayor de 24,322, podríamos afirmar que la probabilidad de hallar una desviación superior a la encontrada era de uno por mil o menor. Si hubiese sido 4,671, admitiríamos que la probabilidad de encontrar una χ^2 mayor que ésta sería del 70 por 100. Como en nuestro ejemplo el valor encontrado es de 8.412, y este valor no se encuentra en la tabla, hemos de recurrir a una simple interpolación lineal si queremos precisar la probabilidad, ya que sabemos ha de estar entre el 30 y el 20 por 100, aunque más próximo a éste. Verificada la interpolación, se concluye que la probabilidad aproximada de encontrar una χ^2 superior

TABLA IV.- DISTRIBUCION DE χ^2

P / G.L.	99%	98%	95%	90%	80%	70%	50%	30%	20%	10%	5%	2%	1%	0,1%	P / G.L.
1	0,000157	0,000628	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827	1
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815	2
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341	16,268	3
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,465	4
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,517	5
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457	6
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322	7
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125	8
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877	9
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588	10
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264	11
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909	12
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528	13
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123	14
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697	15
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252	16
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790	17
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312	18
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820	19
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315	20
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797	21
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268	22
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728	23
24	10,856	11,992	13,844	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179	24
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620	25
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052	26
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476	27
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893	28
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302	29
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703	30

a la hallada es de 21,1 por 100. Es decir, nos encontramos imposibilitados para afirmar que la distribución muestral no se ajusta a la distribución de Gauss. Nos encontramos igualmente imposibilitados para conceder seguridad respecto de si la muestra es normal, aunque se admita por los investigadores que cuando los criterios intrínsecos y extrínsecos coinciden respecto de la normalidad se ha conseguido una estimación prepotente francamente superior a un solo criterio.

Si alguno se fija con detenimiento en la tabla IV advertirá que el número máximo de grados de libertad es 30. ¿Qué ocurrirá cuando operemos con una distribución de más grados de libertad? Aunque el caso no sea corriente, debe preverse. Cuando el número de grados de libertad es mayor de 30, se recurre a una transformación plenamente justificada por los grados de aproximación asintóticos. Se supone la hipótesis nula con varianza 1, y se aplica la fórmula

$$x = \sqrt{2\,\chi^2} - \sqrt{2\,G.L - 1}$$

en la que intervienen el χ^2 hallado y el número de grados de libertad de la distribución. La x de la fórmula se constituye en numerador de la RC, y el denominador desaparece por ser la unidad.

Aplicada a un ejemplo supuesto de $\chi^2 = 63{,}17$ y G. l. $= 35$, obtendríamos:

$$x = \sqrt{2 \times 63{,}17} - \sqrt{2 \times 35 - 1} = 11{,}24 - 8{,}31 = 2{,}93$$

Es decir, la probabilidad de lograr una χ^2 superior a la hallada (63,17) es la misma que la de obtener una puntuación situada en la región crítica correspondiente al $z = 2{,}93$. Lo que, transformado en las tablas, proporciona una probabilidad del 0,2 por 100. Este resultado nos autorizaría para rechazar la hipótesis de que la distribución muestral fuese una verdadera muestra de la población normal.

Aunque, conforme hemos dicho, podríamos incrementar los ejemplos para hacer patente la aplicabilidad de la χ^2, creemos oportuno señalar la extensibilidad de esta distribución a otros casos, pero su indicación desbordaría los límites de este trabajo.

CONCLUSIONES

1. La distribución χ^2, empleada como criterio extrínseco, nos sirve para rechazar la hipótesis de normalidad; pero, dadas sus limitaciones, no es suficiente para afirmarla.
2. La conjunción de criterios intrínsecos y extrínsecos reduce al mínimo el error de segunda especie en que se podría caer.

JOSÉ FERNÁNDEZ HUERTA
Profesor de la Universidad de Madrid